Grado en Matemáticas – Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 2 - Desigualdades de Hölder y Minkowski. Ejemplos de espacios normados (para hacer en clase)

1. Prueba las desigualdades:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty, x \in \mathbb{K}^N)$$

   Prueba que dichas normas son completas y su topología es la topología producto en $\mathbb{K}^N$.

2. Prueba que ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, es un espacio de Banach.

3. Estudia cuándo se da la igualdad en la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* (consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder):

$$\left|\sum_{k=1}^{N} x(k)\overline{y(k)}\right| \leqslant \|x\|_2\|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{K}^N) \tag{1}$$

4. Sea $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Prueba que $\ell_p \subset \ell_q$ y para $x \in \ell_p$ se verifica que $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ y $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. ¿Es cierto que $\bigcup\limits_{p<q} \ell_p = \ell_q$?

5. Sean p, q, r números reales positivos tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Prueba que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \|x\|_p\|y\|_q \quad (x \in \ell_p, y \in \ell_q)$$

   Sugerencia. Basta aplicar una vez la desigualdad de Hölder.

6. Prueba que el espacio de las sucesiones convergentes con la norma uniforme, $(c, \| \ \|_\infty)$, es un espacio de Banach.

7. Prueba que la adherencia de c_{00} en ℓ_∞ es c_0.

8. Prueba que un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable.

9. Prueba que la sucesión $\{e_n\}$ de los vectores unidad es una base de Schauder de ℓ_p para $1 \leqslant p < \infty$. Deduce que c_{00} es denso en ℓ_p, y por tanto que ℓ_p es separable para $1 \leqslant p < \infty$.

10. Da un ejemplo de una sucesión:

    a) Que converja a cero en ℓ_∞ pero no esté acotada en ℓ_1 ni en ℓ_2.

    b) Que converja a cero en ℓ_2 pero no en ℓ_1.

    c) Que converja en c_0 pero no en ℓ_2.

11. Sea $x \in \ell_\infty$. Prueba que $\operatorname{dist}(x, c_0) = \limsup\{|x_n|\}$.

12. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos y $1 \leqslant p < \infty$. Prueba que el conjunto:

$$P = \{x \in \ell_p : |x(n)| < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Está acotado en ℓ_p si, y sólo si, $\{a_n\} \in \ell_p$.

13. Prueba que el conjunto $M = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{n=1}^{\infty} x(n) = 0 \right\}$ es un subespacio vectorial denso en ℓ_p para $1 < p < \infty$.

Sugerencia. Considera la sucesión $x_n = e_k - \dfrac{1}{n}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$ donde los e_k son los vectores unidad.

14. Prueba que $\ell_\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach y estudia bajo qué condiciones es separable.

15. Sea $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Prueba que $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$ y para $f \in L_q[0,1]$ se verifica $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$. ¿Es cierto que $\bigcup_{q>p} L_q[0,1] = L_p[0,1]$? ¿Es cierto que $\bigcap_{p<q} L_p[0,1] = L_q[0,1]$?.